Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Alexander Till

Itôova formule a její aplikace

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jiří Haman

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

2011

Ďakujem predovšetkým svojmu vedúcemu Mgr. Jiřímu Hamanovi za množstvo užitočných rád a trpezlivosť. Zároveň ďakujem tvorcom programu R 2.8.0, v ktorom boli prevedené softwarové výpočty k tejto práci.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa . . . . Alexander Till

. . . .

Obsah

Názov práce: Itôova formule a její aplikace
Autor: Alexander Till
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Jiří Haman
e-mail vedúceho: j.haman@seznam.cz

Abstrakt: Bakalárská práca obsahuje základné poznatky stochastickej analýzy, a to definíciu a vlastnosti stochastického integrálu s integrátorom Wienerovým procesom, definíciu stochastického integrálu s integrátorom Itôovým procesom, Itôovu formulou pre funkciu času a Wienerovho procesu, Itôovu formulou pre funkciu času a Itôovho procesu. V závere práce sú tieto znalosti využité pri riešení niektorých úloh.

Klíčová slova: Wienerov proces, Stochastický integrál, Itôova formula

Title: Itô formula and its applications
Author: Alexander Till
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Jiří Haman
Supervisor's e-mail address: j.haman@seznam.cz

Abstract: The bachelor thesis contains basis and elementary findings of stochastic analysis. It includes definition and properties of stochastic integral with Wiener process as an integrator, definition of stochastic integral with Itô process as an integrator, Itô formula for functions of time and Wiener process, Itô formula for functions of time and Itô process. These conclusions are used to solve certain examples.

Keywords: Wiener process, Stochastic integral, Itô formula

Úvod

Práca sa zaoberá základnými výsledkami stochastickej analýzy, pričom sa obmedzuje na spojité náhodné procesy. Predstavuje čitateľovi stochastický integrál, Itôovu formulu a následne demonštruje jej uplatnenie pri riešení konkrétnych úloh. Rozvoj tejto oblasti matematiky vychádza z článku Itô (1951), po autorovi tohoto článku je pomenovaná Itôva formula.

Práca je členená do troch kapitol. Prvá pojednáva o definícii a niektorých vlastnostiach stochastického integrálu. Druhá sa venuje Itôovej formuli. Tretia kapitola pozostáva z formulácie a riešenia praktických úloh.

Pred samotnou Itôovou formulou je značný priestor venovaný definícii stochastického integrálu. Definovať integrál $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t)$ pre g diferencovateľnú je prirodzené ako

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t) = \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

V našom prípade tak urobiť nemôžme, pretože Wienerov proces, integrátor stochastického integrálu, nemá deriváciu nikde skoro isto. To nás núti pristúpiť k tejto otázke spôsobom, na ktorý nie sme z reálnej analýzy zvyknutí.

V druhej kapitole je vysvetlené, prečo sa pre náhodné procesy nepoužíva vzťah

$$f(g(b)) - f(g(a)) = \int_a^b f'(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t,$$

základná veta kalkulu pre deterministické funkcie. Následne je vyslovená a dokázaná Itôova formula a niektoré jej zobecnenia.

Posledná kapitola ukazuje na vybraných príkladoch využitie získaných vedomostí. Tiež sa snaží čitateľa presvedčiť, že čítaním tejto práce len poodkryl pokličku hrnca zvaného stochastická analýza.

Kapitola 1

Stochastický integrál

1.1 Wienerov proces

Na začiatok uveďme, že predpokladáme čitateľovu znalosť základov teórie miery a integrálu a teórie pravdepodobnosti. Ak tomu tak nie je, odporúčame sa s nimi oboznámiť. K tomuto účelu môžeme doporučiť knihu Lachout (2004). V dalsej casti sa budeme venovat Wienorovmu procesu, tiez nazyvanemu Brownov pohyb.

Definícia 1.1. Nech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, nech I je indexová množina. Rodina reálnych náhodných veličín $\{X_t, t \in I\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sa nazýva **náhodný proces**.

Poznámka 1.2. Náhodný proces zapisujeme formálne $X_t(\omega)$. Budeme používať aj označenia X_t, $X(t)$ či $X(t, \omega)$. Pripomeňme, že pre pevné $t \in I$ je $X(t, \cdot)$ náhodná veličina, pre pevné $\omega \in \Omega$ je $X(\cdot, \omega)$ trajektória náhodného procesu. V ďalšom texte budeme predpokladať, že indexová množina $I \subset \langle 0, \infty)$.

V ďalšej časti sa budeme venovať spojitému Wienerovmu procesu, tiež nazývanému Brownov pohyb. Jedná sa o kľúčový proces stochastickej analýzy, ktorý bude neskôr hrať rolu v definícii stochastického integrálu, rovnako ako pri vyjadrení Itôovej formule.

Definícia 1.3. Náhodný proces W_t , $t \in \mathbb{R}^+$, nazveme **Wienerov proces**, ak platia nasledovné podmienky:

- $W_0 = 0$ skoro isto.
- Pre každé s, t $0 \leq s < t$ má náhodná veličina $W_t - W_s$ normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a rozptylom $t - s$, píšeme $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.

- W_t má nezávislé prírastky, čo znamená, že pre každé $t_1, t_2, \ldots, t_n$, $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ sú veličiny $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezávislé.

- W_t má spojité trajektórie skoro isto.

Teraz je namieste položiť si otázku, či takýto proces vôbec existuje a či je spojitý. Odpoveď je, že existenciu zaručuje Daniell-Kolmogorovova veta, tá zhruba hovorí, že pravdepodobnostné rozdelenie spojitého procesu je jednoznačne určené svojimi konečnerozmernými rozdeleniami, čo nám zabezpečuje jednoznačnosť Wienerovho procesu. Záujemcov odkážeme na Rogers, Williams (2000), str. 126. Táto veta však na zodpovedanie otázky spojitosti nestačí, a preto potrebujeme Kolmogorov-Čentesovu vetu (veta 1.5).

Definícia 1.4. Náhodnú veličinu $X(t)$ nazveme **realizáciou** veličiny $Y(t)$, ak existuje taká množina Ω_0, že $P(\Omega_0) = 1$ a pre každé ω z Ω_0 je $X(t, \omega) = Y(t, \omega)$ pre všetky t.

Veta 1.5. Nech je $X(t), t \in \langle 0, 1 \rangle$ náhodný proces a nech existujú $\alpha, \beta, K > 0$ také, že platí

$$E|X(t) - X(s)|^{\alpha} \leq K|t - s|^{1+\beta}$$

pre každé $0 \leq t, s \leq 1$. Potom má $X(t)$ spojitú realizáciu.

Dôkaz: Friedman (2006), str. 7 - 9. $\square$

Poznámka 1.6. Wienerov proces má skutočne spojitú realizáciu, pretože pre neho platí

$$E|W_t - W_s|^4 = 3|t - s|^2,$$

tj. v predchádzajúcej vete volíme $\alpha = 4$, $\beta = 1$ a $K = 3$.

Teraz ešte uvedieme dve vlastnosti Wienerovho procesu, z ktorých budeme vychádzať pri definovaní stochastického integrálu.

Veta 1.7. Wienerov proces $W(t)$ nie je nikde diferencovateľný skoro isto.

Dôkaz: Friedman (2006), str.40 $\square$

Zadefinujeme k-variáciu náhodného procesu, ktorá priblíži ďalšie vlastnosti Wienerovho procesu.

Definícia 1.8. Nech X_t je náhodný proces. Potom definujeme **k-variáciu** procesu X_t ako

$$V^k(X_t) = \lim_{|\Delta_n(t)|\to 0} \sum_{j=1}^{n} |X_{t_j} - X_{t_{j-1}}|^k, \quad \text{v pravdepodobnosti,}$$

kde

$$|\Delta_n(t)| = \max_{i=1,\ldots,n} |t_i - t_{i-1}|$$

je norma delenia $\Delta_n(t)$ intervalu $\langle 0, t\rangle$, $\Delta_n(t) = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$.

V ďalšom pre nás budú zaujímavé predovšetkým obyčajná variácia náhodného procesu ($k = 1$) a kvadraticá variácia ($k = 2$). Kvadratickú variáciu procesu X_t budeme označovať $\langle X\rangle_t$.

Veta 1.9. Wienerov proces W_t je proces s konečnou kvadratickou variáciou, konkrétne $\langle W\rangle_t = t$, skoro isto, a nekonečnou variáciou.

Dôkaz: Platí, že

$$E(|W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|^2) = t_j - t_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, n$$

teda

$$E(\sum_{j=1}^{n} |W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|^2) = \sum_{j=1}^{n} E|W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|^2 = t.$$

Nech $t \in \mathbb{R}^+$ a $|\Delta_n(t)| \to 0$. Potom môžme písať

$$\begin{aligned} E(\sum_{j=1}^{n} |W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|^2 - t)^2 &= Var(\sum_{j=1}^{n} |W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|^2) \le \sum_{j=1}^{n} E(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^4 \\ &= 3\sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})^2 \le 3|\Delta_n(t)|t \to 0 \end{aligned}$$

pre $n \to \infty$. Označme $X = \sum_{j=1}^{n} |W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|^2 - t$. Potom z Čebyševovej nerovnosti máme, že pre $\epsilon > 0$

$$P(|X| \ge \epsilon) \le \frac{E|X|^2}{\epsilon^2} \le \frac{3|\Delta_n(t)|t}{\epsilon^2} \to 0 \quad \text{pre } n \to \infty.$$

Pre spojitý náhodný proces X s konečnou kvadratickou variáciou platí nasledovná implikácia: ak má X konečnú variáciu, tak má nulovú kvadratickú variáciu skoro isto. Obmenou tejto implikácie dostávame, že spojitý proces s konečnou nenulovou kvadratickou variáciou má nekonečnú variáciu, čo je práve prípad Wienerovho procesu. $\square$

1.2 Motivácia

Konštrukcia Itôovho stochastického integrálu vychádza z Riemann-Stieltjesovho integrálu. Ten je definovaný pre funkciu g monotónne rastúcu na konečnom intervale $\langle a, b\rangle$ a f ohraničenú na $\langle a, b\rangle$ ako

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t) = \lim_{|\Delta_n|\to 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

kde $|\Delta_n|$ je maximová norma delenia $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$, a τ_i je z intervalu $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$. Pre f spojitú monotónne rastúcu a g spojitú môžeme pomocou integrácie per partes definovať

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}f(t) = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t).$$

Mohli by sme podobným spôsobom definovať $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}f(t)$ pre f spojitú bez požiadavky monotónnosti? Označme

$$R_n = \sum_{i=1}^n f(t_i)(f(t_i) - f(t_{i-1})) \qquad \& \qquad L_n = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(f(t_i) - f(t_{i-1})).$$

Platí, že

$$R_n - L_n = \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2,$$

$$R_n + L_n = \sum_{i=1}^n (f(t_i)^2 - f(t_{i-1})^2) = f(b)^2 - f(a)^2,$$

odkiaľ dostávame

$$R_n = \frac{1}{2}\left(f(b)^2 - f(a)^2 + \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2\right),$$

$$L_n = \frac{1}{2}\left(f(b)^2 - f(a)^2 - \sum_{i=1}^{n}(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2\right). \tag{1.1}$$

Z tohto tvaru vidíme, že

$$\lim_{|\Delta_n|\to 0} R_n = \lim_{|\Delta_n|\to 0} L_n$$

len ak je

$$\lim_{|\Delta_n|\to 0} \sum_{i=1}^{n}(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2,$$

kvadratická variácia funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$, nulová. Už vieme, že Wienerov proces má nenulovú kvadratickú variáciu. Od toho sa bude odvíjať aj definícia stochastického integrálu. Takisto budeme chcieť, aby bol stochastický integrál, podobne ako v reálnej analýze, lineárny. Ďalšou vlastnosťou, ktorú budeme od nového stochastického integrálu vyžadovať, je, aby to bol proces, ktorý je takzvaný martingal. Práve preto je dôležité, aby sme použili ľavý krajný bod intervalu ako argument funkcie v Riemannovských sumách.

Najprv začneme pomocnými definíciami, ktorými sú filtrácia a adaptovanosť náhodného procesu vzhľadom k danej filtrácii.

Definícia 1.10. Nech je $(\Omega, \mathcal{F})$ merateľný priestor. Systém množín $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ nazveme **filtráciou** na priestore $(\Omega, \mathcal{F})$, ak pre každé $t \geq 0$ je $\mathcal{F}_t$ $\sigma - algebra$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ a pre $0 \leq s < t$ je $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Definícia 1.11. Povieme, že náhodný proces X_t je **adaptovaný proces** k filtrácii $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$, ak je náhodná veličina X_t pre každé $t \geq 0$ $\mathcal{F}_t$-merateľná.

Poznámka 1.12. V ďalšom texte budeme uvažovať vždy prirodzenú fitráciu $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s,\ s \leq t\}$.

Teraz sme pripravení zadefinovať martingal.

Definícia 1.13. Nech je X_t náhodný proces adaptovaný k filtrácii $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$. Potom sa X_t nazýva **martingal** vzhľadom k $\{\mathcal{F}_t\}$, tiež $\mathcal{F}_t$-**martingal**, ak pre všetky $0 \leq s < t$ je

- $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ skoro isto.
- $E|X_t| < \infty$ pre všetky $t \geq 0$.

Poznámka 1.14. Historicky vzikol koncept martingalu ako nástroj na štúdium spravodlivých hazardných hier a rôznych stratégií uzatvárania stávok. Príkladom takejto hry je hra, v ktorej sa dvaja hráči dohodnú na výške výhry a hodia mincou. Prvý hráč vyhráva v prípade, že padne hlava, druhý hráč získa výhru, ak padne orol. Podľa najjednoduchšej stávkovacej stratégie hráč v prípade prehry v ďalšom kole výšku stávky zdvojnásobí. Takto by v prípade výhry získal okrem už stratenej sumy aj výšku pôvodnej odmeny za výhru. Pretože pravdepodobnosť neprerušenej série neprospešných hodov s postupujúcim časom konverguje k nule, môže sa zdať, že zisk vo výške prvotnej odmeny je istý. V skutočnosti však exponenciálny rast výšky stávky a to, že hráč má na začiatku k dispozícii konečnú sumu spôsobí, že očakávaná výška výhry je nula.

Pre nás sú martingaly zaujímavé predovšetkým preto, že Wienerov proces, náš budúci integrátor doposiaľ nedefinovaného stochastického integrálu, je príkladom martingalu so spojitým časom.

1.3 Wienerov integrál

Najprv zadefinujeme stochastický integrál pre deterministický integrand.

Definícia 1.15. Nech je g jednoduchá deterministická funkcia daná predpisom $g(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{\langle t_{i-1}, t_i)}(t)$, kde $\{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ je delenie intervalu $\langle a, b \rangle$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Potom definujme

$$I(g) = \sum_{i=1}^{n} a_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}),$$

W_t značí Wienerov proces.

Lemma 1.16. Nech je g jednoduchá funkcia. Potom je $I(g)$ z definície 1.15 je náhodná veličina s normálnym rozdelením

$$I(g) \sim N\left(0, \int_a^b g(t)^2 \, \mathrm{d}t\right).$$

Dôkaz: Prírastky Wienerovho procesu $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ sú nezávislé náhodné veličiny pre $i = 1, \ldots, n$ s normálnym rozdelením so strednou hodnotou 0 a rozptylom

$t_i - t_{i-1}$. Pretože $I(g)$ je ich lineárnou kombináciou, je to tiež normálne rozdelená náhodná veličina so strednou hodnotou 0 a rozptylom

$$E\{I(g)^2\} = E\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b g(t)^2 \, \mathrm{d}t.$$

Využili sme nezávislosť prírastkov Wienerovho procesu. □

Označenie 1.17. Označme $L^2(\Omega)$ priestor náhodných veličín s konečným druhým momentom so skalárnym súčinom $E(XY)$ pre $X, Y \in L^2(\Omega)$.

Definícia 1.18. Nech je $f \in L^2(\langle a, b\rangle)$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť jednoduchých funkcií takých, že $f_n \to f$ v $L^2(\langle a, b\rangle)$. Potom definujme

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n), \text{ v } L^2(\Omega).$$

$I(f)$ nazývame **Wienerov integrál** funkcie f, $(I(f))(\omega) = (\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}W_t)(\omega)$ skoro isto. Niekedy ho označujeme len ako $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}W_t$.

Poznámka 1.19. Vďaka lemme 1.16 je postupnosť $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyovská v $L^2(\Omega)$, a teda $\lim I(f_n)$ pre $n \to \infty$ v $L^2(\Omega)$ skutočne existuje.

Lemma 1.20. Nech $f \in L^2(\langle a, b\rangle)$. Potom pre Wienerov integrál platí

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}W_t \sim \left(0, \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right).$$

Dôkaz: Ak je X_n normálne rozdelená náhodná veličina so strednou hodnotou μ_n a rozptylom σ_n^2 a $X_n \to X$ pre $n \to \infty$ v $L^2(\Omega)$, tak je X náhodná veličina a má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2, kde

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n \qquad \& \qquad \sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2.$$

Pre f jednoduchú lemma platí podľa lemmy 1.16. Pre $f \in L^2(\langle a, b\rangle)$ obecnú lemma platí, pretože

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}W_t = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}W_t$$

a $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}W_t$ sú náhodné veličiny s normálnym rozdelením, majú strednú hodnotu 0, rozptyl $\int_a^b f_n(t)^2\,\mathrm{d}t$. $\square$

1.4 Stochastický integrál ako martingal

Stochastický integrál s deterministickým integrandom však pre nás nie je postačujúci. Chceli by sme mať integrál nielen s náhodným integrátorom, ale aj s náhodným integrandom. Dôležitým bodom je, aby sme zachovali konečnú strednú hodnotu integrálu spolu s konečnosťou druhého momentu.

Poznámka 1.21. Zafixujeme pevne Wienerov proces a filtráciu $\{\mathcal{F}_t, t \in \langle a, b\rangle\}$ splňujúce podmienky, že

- pre každé t je W_t $\mathcal{F}_t$-merateľná náhodná veličina.
- pre každé $s \leq t$ je náhodná veličina $W_t - W_s$ nezávislá na σ-algebre $\mathcal{F}_s$.

Označenie 1.22. Nech $f(t,\omega)$, $a \leq t \leq b$, $\omega \in \Omega$ je náhodný proces taký, že spĺňa

- $f(t,\omega)$ je adaptovaná k filtrácii $\{\mathcal{F}_t\}$
- $\int_a^b E(|f(t)|^2)\,\mathrm{d}t < \infty$.

Priestor takýchto procesov označíme $L^2_{ad}(\langle a, b\rangle \times \Omega)$.

Definícia 1.23. Nech $g(t,\omega)$ je jednoduchý náhodný proces z $L^2_{ad}(\langle a, b\rangle \times \Omega)$ daný vzťahom

$$g(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega) I_{\langle t_{i-1}, t_i)}(t)\ ,$$

kde ξ_{i-1} je $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-merateľná a $E(\xi_{i-1}^2) < \infty$. Potom definujeme

$$I(g) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}).$$

Lemma 1.24. Nech je $I(g)$ ako v definícii 1.23. Potom platí, že

$$EI(g) = 0 \qquad \& \qquad E(|I(g)|^2) = \int_a^b E(g(t))^2 \, \mathrm{d}t.$$

Dôkaz: Pre každé $1 \leq i \leq n$ z definície 1.23 platí

$$\begin{aligned} E\{\xi_{i-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\} &= E\{E[\xi_{i-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]\} \\ &= E\{\xi_{i-1}E[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]\} = E\{\xi_{i-1}E[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}]\}, \end{aligned}$$

teda $EI(g) = 0$. Ďalej

$$|I(g)|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{i-1}\xi_{j-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}).$$

Pre $i \leq j$ platí

$$\begin{aligned} &E\{\xi_{i-1}\xi_{j-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\} \\ &\quad = E\{E[\xi_{i-1}\xi_{j-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\} \\ &\quad = E\{\xi_{i-1}\xi_{j-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})E[(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\} = 0. \end{aligned}$$

Pre $i = j$ zase platí

$$\begin{aligned} E\{\xi_{i-1}^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\} &= E\{E[\xi_{i-1}^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]\} \\ &= E\{\xi_{i-1}^2 E[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2]\} \\ &= E\{\xi_{i-1}^2(t_i - t_{i-1})\} \\ &= (t_i - t_{i-1})E\xi_{i-1}^2 \ , \end{aligned}$$

teda skutočne je $E(|I(g)|^2) = \int_a^b E(g(t)^2) \, \mathrm{d}t$. □

Nasleduje významné aproximačné lemma a jeho dôkaz.

Lemma 1.25. Nech $f \in L^2_{ad}(\langle a, b\rangle \times \Omega)$. Potom existuje taká postupnosť jednoduchých náhodných procesov $\{f_n(t)\}, \ f_n(t) \in L^2_{ad}(\langle a, b\rangle \times \Omega)$, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} \, \mathrm{d}t = 0.$$

Dôkaz:

(I) nech je $E(f(s)f(t))$ spojitá funkcia (t,s) na množine $\langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle$, $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ je delenie $\langle a,b\rangle$. Potom definujme

$$f_n(t,\omega) = f(t_{i-1},\omega), \quad t_{i-1} < t \leq t_i.$$

Postupnosť $\{f_n(t,\omega)\}$ je postupnosť náhodných procesov z $L^2_{ad}(\langle a,b\rangle \times \Omega)$. Pretože $E(f(s)f(t))$ je spojitá na $\langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle$, tak

$$\lim_{s\to t} E\{|f(t) - f(s)|^2\} = 0,$$

z čoho vyplýva, že pre každé $t \in \langle a,b\rangle$ je

$$\lim_{n\to\infty} E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} = 0.$$

Aplikovaním nerovnosti $|x-y|^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$ na f_n, f dostávame

$$|f(t) - f_n(t)|^2 \leq 2(|f(t)|^2 + |f_n(t)|^2).$$

Teda pre $a \leq t \leq b$ platí

$$E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} \leq 2(E\{|f(t)|^2\} + E\{|f_n(t)|^2\}) \leq 4 \sup_{a\leq t\leq b} (E\{|f(t)|^2\}).$$

Z Lebesgueovej vety o konvergentnej majorante dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} \, \mathrm{d}t = 0$$

(II) nech je $f(t,\omega)$ ohraničená. Definujme náhodný proces g_n ako

$$g_n(t,\omega) = \int_0^{n(t-a)} e^{-\tau} f(t - \tau/n, \omega) \, \mathrm{d}\tau,$$

ktorý je adaptovaný k filtrácii $\{\mathcal{F}_t\}$ a $\int_a^b E\{|g_n(t)|^2\} \, \mathrm{d}t < \infty$. Keď položíme $u = t - n/\tau$, môžme g_n napísať ako

$$g_n(t,\omega) = \int_a^b n e^{-n(t-u)} f(u,\omega) \, \mathrm{d}u.$$

Pomocou tohto tvaru vieme overiť, že

$$\lim_{t\to s} E\{|g_n(t) - g_n(s)|^2\} = 0,$$

z čoho vyplýva, že pre každé n je $E(g_n(t), g_n(s))$ spojitá v (t, s).

Ďalej ukážeme, že $\int_a^b E\{|f(t) - g_n(t)|^2\}\,\mathrm{d}t \to 0$ pre $n \to \infty$.
Vieme, že

$$f(t) - g_n(t) = \int_0^\infty e^{-\tau}(f(t) - f(t - \tau/n))\,\mathrm{d}\tau,$$

kde pre $t < a$ uvažujeme $f(t) = 0$. Pretože $e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau$ je pravdepodobnostná miera, môžme použiť Schwartzovu nerovnosť na $f(t) - g_n(t)$ nasledovným spôsobom:

$$|f(t) - g_n(t)|^2 \le \int_0^\infty |f(t) - f(t - \tau/n)|^2 e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

Ďalej môžme písať

$$\begin{aligned}
&\int_a^b E\{|f(t) - g_n(t)|^2\}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad\le \int_a^b \int_0^\infty E\{|f(t) - f(t - \tau/n)|^2\}e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\
&\qquad= \int_0^\infty e^{-\tau}\left(\int_a^b E\{|f(t) - f(t - \tau/n)|^2\}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau \\
&\qquad= \int_0^\infty e^{-\tau} E\left\{\int_a^b |f(t) - f(t - \tau/n)|^2\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Pretože f je ohraničená, tak pre $n \to \infty$

$$\int_a^b |f(t, \cdot) - f(t - \tau/n, \cdot)|^2\,\mathrm{d}t \to 0, \quad \text{skoro isto},$$

odkiaľ vyplýva, že $\int_a^b E\{|f(t) - g_n(t)|^2\}\,\mathrm{d}t \to 0$ pre $n \to \infty$, čo sme chceli dokázať.

Vieme, že $E(g_n(t), g_n(s))$ je spojitá v (t, s). Preto môžme podľa bodu (I) pre každé n nájsť adaptovaný jednoduchý náhodný proces f_n, že

$$\int_a^b E\{|g_n(t) - f_n(t)|^2\}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{n},$$

čo spolu s $\int_a^b E\{|f(t) - g_n(t)|^2\}\,\mathrm{d}t \to 0$ pre $n \to \infty$ dáva, že pre f ohraničenú platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E\{|f(t) - f_n(t)|^2\}\,\mathrm{d}t = 0.$$

(III) Nech je f všeobecný náhodný proces z $L^2_{ad}(\langle a, b\rangle \times \Omega)$. Potom pre každé n definujme

$$g_n(t,\omega) = \begin{cases} f(t,\omega) & |f(t,\omega)| \leq n \\ 0 & |f(t,\omega)| > n. \end{cases}$$

Podľa Lebesgueovej vety o konvergentnej majorante platí

$$\int_a^b E\{|f(t) - g_n(t)|^2\}\,\mathrm{d}t \to 0,\ n \to \infty. \tag{1.2}$$

Pre každé n je $g_n(t,\omega)$ ohraničená, a tak vieme podľa bodu (II) nájsť adaptovaný jednoduchý náhodný proces $f_n(t,\omega)$ tak, aby

$$\int_a^b E\{|g_n(t) - f_n(t)|^2\}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}. \tag{1.3}$$

Platnosť

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E\{|f(t) - f_n(t)|^2\}\,\mathrm{d}t = 0$$

vyplýva z (1.2) a z (1.3).

□

Definícia 1.26. Nech je $f(t,\omega)$ náhodný proces, $f(t) \in L^2_{ad}(\langle a, b\rangle \times \Omega)$. Potom definujeme **Itôov integrál** $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}W_t$ ako

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}W_t = \lim_{n\to\infty} I(f_n),\ \text{v } L^2(\Omega),$$

kde $\{f_n\}$ je postupnosť adaptovaných jednoduchých náhodných procesov z $L^2_{ad}(\langle a, b\rangle \times \Omega)$, pre ktorú platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E\{|f(t) - f_n(t)|^2\}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Poznámka 1.27. Lemma 1.24 pre $I(f_n)$ z definície 1.26 tvrdí, že

$$E\{|I(f_n) - I(f_m)|^2\} = \int_a^b E\{|f_n(t) - f_m(t)|^2\}\,\mathrm{d}t \to 0,$$

pre $m, n \to \infty$, teda $\{I(f_n)\}$ je Cauchyovská v $L^2(\Omega)$.

Veta 1.28. Nech je $f(t) \in L^2_{ad}(\langle a, b\rangle \times \Omega)$. Potom pre Itôov integrál $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}W_t$ platí

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}W_t \sim N\left(0, \int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right).$$

Dôkaz: Z dôkazu lemmy 1.25, krok 2, vidno, že platnosť lemmy 1.24 sa zachová pre $f(t) \in L^2_{ad}(\langle a, b\rangle \times \Omega)$. □

Veta 1.29. Nech je $f(t)$ náhodný proces, $f(t) \in L^2_{ad}(\langle a, b\rangle \times \Omega)$. Potom je X_t,

$$X_t = \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}W_s,\ \ a \leq t \leq b,$$

martingal vzhľadom k filtrácii $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$.

Dôkaz: Veta sa najprv dokáže pre jednoduchý náhodný proces. Následne sa k f obecnej, $f \in L^2_{ad}(\langle a, b\rangle \times \Omega)$, zvolí postupnosť jednoduchých procesov $\{f_n\}$ tak, aby

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E\{|f_n(s) - f(s)|^2\}\,\mathrm{d}s = 0.$$

Označíme

$$X_t^{(n)} = \int_a^t f_n(s)\,\mathrm{d}W_s,$$

o ktorom už vieme, že to je martingal. Rozdiel $X_t - X_s$, $s < t$, rozpíšeme ako

$$X_t - X_s = (X_t - X_t^{(n)}) + (X_t^{(n)} - X_s^{(n)}) + (X_s^{(n)} - X_s),$$

odkiaľ platí

$$E\{X_t - X_s|\mathcal{F}_s\} = E\{X_t - X_t^{(n)}|\mathcal{F}_s\} + E\{X_s^{(n)} - X_s|\mathcal{F}_s\}.$$

Nakoniec ukážeme, že $E\{X_t - X_t^{(n)}|\mathcal{F}_s\}$ konverguje v pravdepodobnosti k 0 pre $n \to \infty$. Kompletný dôkaz si môžete pozrieť v Kuo (2006), str. 53-55. □

1.5 Stochastický integrál ako lokálny martingal

Úspešne sme definovali klasický Itôov integrál. Avšak aj tento integrál má svoje nedostatky. Jedným z nich je ťažko overiteľná podmienka pre konečnosť druhého momentu, napríklad pre integrál $\int_0^t \exp\{W_s^4\}\,\mathrm{d}W_s$. Druhým je pomerne málo integrovateľných procesov. Vezmime si napríklad integrál $\int_0^t \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}W_s$. Zaveďme substitúciu $1-s=y$, potom

$$\int_0^t \frac{1}{(1-s)^2}\,\mathrm{d}s = \int_{1-t}^1 y^{-2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{y}\right]_{1-t}^t = \frac{1}{1-t} - 1.$$

Integračnú podmienku z minulej sekcie nesplĺňa,

$$E\int_0^t \frac{1}{(1-s)^2}\,\mathrm{d}s \to \infty.$$

pre $t \to 1_-$. Preto budeme definovať integrál pre širšiu triedu procesov. Tieto problémy môžme odstrániť, ak sa uskromníme s tým, že integrál bude martingalom len lokálne. Začnime pomocnými tvrdeniami a definíciami.

Definícia 1.30. Náhodnú veličinu $\tau : \Omega \to \langle a,b\rangle$ nazveme **markovským časom** vzhľadom k filtrácii $\{\mathcal{F}_t; a \le t \le b\}$, ak $\{\omega; \tau(\omega) \le t\}$ je z filtrácie $\{\mathcal{F}_t\}$ pre všetky $t \in \langle a,b\rangle$.

Označenie 1.31. Označíme

$$X_{\min\{t,\tau_n\}} = \int_a^{\min\{t,\tau_n\}} f(s)\,\mathrm{d}W_s = \int_a^b I_{\langle a,\min\{t,\tau_n\}\rangle}(s)\,f(s)\,\mathrm{d}W_s.$$

Definícia 1.32. Nech je náhodný proces $X(t,\omega)$ adaptovaný k filtrácii $\{\mathcal{F}_t\}$, $a \le t \le b$. $X(t)$ nazveme **lokálny martingal**, ak existuje taká postupnosť markovských časov $\{\tau_n\}$, že

- τ_n monotónne konverguje k b zdola, skoro isto, $n \to \infty$
- $X(\min\{t,\tau_n\})$ je martingal vzhľadom k $\{\mathcal{F}_t\}$ pre každé n, $a \le t \le b$.

Označenie 1.33. Nech $f(t,\omega)$ je náhodný proces, pre ktorý platí

- $f(t)$ je adaptovaná k filtrácii $\{\mathcal{F}_t\}$
- $\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$ skoro isto.

Množinu takýchto procesov označíme $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2 \langle a, b \rangle)$.

Poznámka 1.34. Ak f patrí $L^2_{ad}(\langle a, b \rangle \times \Omega)$, tak $\int_a^b (E\{|f(t)|^2\}) \, \mathrm{d}t < \infty$. Podľa Fubíniovej vety platí

$$E \int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_a^b (E\{|f(t)|^2\}) \, \mathrm{d}t < \infty,$$

čo implikuje $\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty$ skoro isto. Preto platí inklúzia

$$L^2_{ad}(\langle a, b \rangle \times \Omega) \subset \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2 \langle a, b \rangle).$$

Teda množinu prípustných integrandov skutočne rozšírime. Zároveň procesy, pre ktoré sme už stochastický integrál definovali, budú integrovateľné naďalej.

Lemma 1.35. Nech $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2 \langle a, b \rangle)$. Potom existuje postupnosť náhodných procesov $\{f_n\}$ z $L^2_{ad}(\langle a, b \rangle \times \Omega)$, pre ktorú platí

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 0, \qquad \text{skoro isto,}$$

a tiež v pravdepodobnosti.

Dôkaz: Pre každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$f_n(t, \omega) = \begin{cases} f(t, \omega) & \text{pre } \int_a^t |f(s, \omega)|^2 ds \leq n \\ 0 & \text{pre } \int_a^t |f(s, \omega)|^2 ds > n. \end{cases}$$

Hľa, f_n je adaptovaná k filtrácii $\{\mathcal{F}_t\}$. Položme

$$\tau_n(\omega) = \sup_{a \leq t \leq b} \left\{ \int_a^t |f(s, \omega)|^2 \, \mathrm{d}s \leq n \right\}.$$

Táto postupnosť sa nazýva lokalizačná postupnosť, viz Steele (2001), str. 96. Potom platí

$$\int_a^b |f_n(t, \omega)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_a^{\tau_n(\omega)} |f(t, \omega)|^2 \, \mathrm{d}t, \qquad \text{skoro isto.}$$

Odtiaľ máme, že $\int_a^b |f_n(t,\omega)|^2\,\mathrm{d}t \le n$, skoro isto, z čoho vyplýva vzťah

$$\int_a^b E\{|f_n(t,\omega)|^2\}\,\mathrm{d}t \le n,$$

a teda $f_n \in L^2_{ad}(\langle a,b\rangle \times \Omega)$.
Zvoľme $\omega \in \Omega$ pevné. Potom pre $n > \int_a^b |f(t,\omega)|^2\,\mathrm{d}t$ platí pre každé $t \in \langle a,b\rangle$ podľa definície f_n, ze $f_n(t,\omega) = f(t,\omega)$. Teda platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t,\omega) - f_n(t,\omega)|^2\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{skoro isto,}$$

pretože

$$\int_a^b |f(t,\omega)|^2\,\mathrm{d}t < \infty \qquad \text{pre skoro všetky } \omega \in \Omega.$$

Konvergencia skoro isto implikuje konvergenciu v pravdepodobnosti, a tak

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t,\omega) - f_n(t,\omega)|^2\,\mathrm{d}t = 0$$

aj v pravdepodobnosti. □

Lemma 1.36. Nech $f(t,\omega)$ je jednoduchý náhodný proces taký, že $f(t) \in L^2_{ad}(\langle a,b\rangle \times \Omega)$. Potom pre ľubovolné kladné reálne konštanty C, ϵ platí nerovnosť

$$P\left\{\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}W_t\right| > \epsilon\right\} \le \frac{C}{\epsilon^2} + P\left\{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t > C\right\}.$$

Dôkaz: Kuo (2006), str. 64 - 65. □

Lemma 1.37. Nech $f(t,\omega) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2\langle a,b\rangle)$. Potom existuje taká postupnosť $\{f_n(t,\omega)\}$ jednoduchých náhodných procesov z $L^2_{ad}(\langle a,b\rangle \times \Omega)$, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{v pravdepodobnosti.} \tag{1.4}$$

Dôkaz: Podľa lemmy 1.35 vieme nájsť takú postupnosť $\{g_n(t)\}$ z $L^2_{ad}(\langle a,b\rangle \times \Omega)$, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |g_n(t) - f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{v pravdepodobnosti.}$$

Pre každé $g_n(t)$ môžme podľa lemmy 1.25 nájsť jednoduchý náhodný proces $f_n(t)$ z $L^2_{ad}(\langle a,b\rangle \times \Omega)$ tak, aby platilo

$$E \int_a^b |g_n(t) - f_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t \le \frac{1}{n}. \tag{1.5}$$

Pretože platí nerovnosť $|x+y|^2 \le 2(|x|^2+|y|^2)$, tak pre každé $\epsilon > 0$ platí inklúzia

$$\begin{aligned}&\left\{\textstyle\int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t > \epsilon\right\} \\ &\quad \subset \left\{\textstyle\int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t > \frac{\epsilon}{4}\right\} \cup \left\{\textstyle\int_a^b |g_n(t) - f_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t > \frac{\epsilon}{4}\right\},\end{aligned}$$

a teda aj

$$\begin{aligned}&P\left\{\textstyle\int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t > \epsilon\right\} \\ &\quad < P\left\{\textstyle\int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t > \frac{\epsilon}{4}\right\} + P\left\{\textstyle\int_a^b |g_n(t) - f_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t > \frac{\epsilon}{4}\right\}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Markovova nerovnosť pre $P\left\{\int_a^b |f_n(t) - g_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t > \frac{\epsilon}{4}\right\}$ spolu s nerovnosťou (1.5) nám dávajú

$$P\left\{\int_a^b |f_n(t) - g_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t > \frac{\epsilon}{4}\right\} \le \frac{4}{n\epsilon}.$$

Pretože

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |g_n(t) - f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{v pravdepodobnosti}$$

a platí nerovnosť (1.6), tak pre každé $\epsilon > 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 \,\mathrm{d}t > \epsilon\right\} = 0,$$

čo je ekvivalentné s (1.4). □

Definícia 1.38. Nech je f náhodný proces z $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2 \langle a, b \rangle)$. Podľa lemmy 1.37 vyberme postupnosť jednoduchých náhodných procesov $\{f_n\} \in L^2_{ad}(\langle a, b \rangle \times \Omega)$ tak, aby platilo

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 0, \quad \text{v pravdepodobnosti.}$$

Potom definujme **stochastický integrál** $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}W_t$ pre f z $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2 \langle a, b \rangle)$ ako

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}W_t = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}W_t, \quad \text{v pravdepodobnosti.}$$

To, že $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}W_t$ skutočne konverguje v pravdepodobnosti, ukážeme v nasledujúcej poznámke.

Poznámka 1.39. Majme f a f_n ako v definícii 1.38. Použijme lemma 1.36 na proces $f_n - f_m$ s konštantami $\epsilon > 0$ a $C = \frac{\epsilon^3}{2}$. Dostávame

$$P\left\{|I(f_n) - I(f_m)| > \epsilon\right\} \leq \frac{\epsilon}{2} + P\left\{\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 \, \mathrm{d}t > \frac{\epsilon^3}{2}\right\},$$

kde $I(f_n) = \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}W_t$. Podobne ako v dôkaze lemmy 1.37 vieme overiť, že

$$\begin{aligned} &\left\{\textstyle\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 \, \mathrm{d}t > \frac{\epsilon^3}{2}\right\} \\ &\qquad \subset \left\{\textstyle\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 \, \mathrm{d}t > \frac{\epsilon^3}{8}\right\} \cup \left\{\textstyle\int_a^b |f(t) - f_m(t)|^2 \, \mathrm{d}t > \frac{\epsilon^3}{8}\right\}, \end{aligned}$$

odkiaľ vyplýva, že

$$\begin{aligned} &P\left\{\textstyle\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 \, \mathrm{d}t > \frac{\epsilon^3}{2}\right\} \\ &\quad \leq P\left\{\textstyle\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 \, \mathrm{d}t > \frac{\epsilon^3}{8}\right\} + P\left\{\textstyle\int_a^b |f(t) - f_m(t)|^2 \, \mathrm{d}t > \frac{\epsilon^3}{8}\right\}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Pretože podľa lemmy 1.35 platí

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 0, \quad \text{v pravdepodobnosti,}$$

tak z (1.7) platí aj

$$\lim_{m,n \to \infty} P\left\{\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 \, \mathrm{d}t > \frac{\epsilon^3}{2}\right\} = 0.$$

Teda existuje N prirodzené, že platí

$$P\left\{\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 \,\mathrm{d}t > \frac{\epsilon^3}{2}\right\} < \frac{\epsilon}{2},$$

pre všetky $m, n \geq N$, čo spolu s

$$P\{|I(f_n) - I(f_m)| > \epsilon\} \leq \frac{\epsilon}{2} + P\left\{\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 \,\mathrm{d}t > \frac{\epsilon^3}{2}\right\}$$

dáva výsledok

$$P\{|I(f_n) - I(f_m)| > \epsilon\} < \epsilon,$$

pre všetky $m, n \geq N$. Postupnosť $\{I(f_n)\}$ skutočne konverguje v pravdepodobnosti.

Veta 1.40. Nech f je náhodný proces z $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2\langle a, b\rangle)$. Potom je proces

$$X_t = \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}W_s,$$

lokálny martingal vzhľadom k filtrácii $\{\mathcal{F}_t\}$, kde $a \leq t \leq b$.

Dôkaz: Kuo (2006), str. 70 - 71 □

Zaujímavý pohľad na stochastický integrál ponúka veta o Riemannovej reprezentácii, ktorá potvrdzuje intuíciu ohľadom Itôovho integrálu.

Veta 1.41. Nech je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá a $t_i = \frac{it}{n}$ pre $0 \leq i \leq n$ je delenie $\langle 0, T\rangle$. Potom platí

$$\int_0^T f(W_s)\,\mathrm{d}W_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(W_{t_i})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}), \qquad \text{v pravdepodobnosti.}$$

Dôkaz: Steele (2001), str. 99. □

1.6 Rozšírenie na Itôov proces

Na záver tejto kapitoly si uvedieme ešte jedno zobecnenie stochastického integrálu, a to integrálu s Itôovym procesom ako integrátorom.

Definícia 1.42. Nech sú $f(t), g(t)$ adaptované náhodné procesy také, že

$$\int_0^t |f(s)|^2 \, \mathrm{d}s < \infty, \quad \text{skoro isto} \qquad \& \qquad \int_0^t |g(s)| \, \mathrm{d}s < \infty, \quad \text{skoro isto.}$$

Potom proces $X(t)$ tvaru

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s) \, \mathrm{d}W_s + \int_0^t g(s) \, \mathrm{d}s$$

nazveme **Itôov proces**, $X(0)$ je konštanta.

Veta 1.43. Nech je $X(t)$ Itôov proces, $f(t), g(t)$ sú ako v definícii 1.42. Potom je jeho kvadratická variácia

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t |f(s)|^2 \, \mathrm{d}s.$$

Dôkaz: Označme $I(t) = \int_0^t f(s) \, \mathrm{d}W_s$ a $R(t) = \int_0^t g(s) \, \mathrm{d}s$, $I(t)$ aj $R(t)$ sú spojité v t. Nech je $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ delenie $\langle 0, t \rangle$. Platí

$$\sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 =$$
$$\sum_{i=1}^n (I_{t_i} - I_{t_{i-1}})^2 + \sum_{i=1}^n (R_{t_i} - R_{t_{i-1}})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (I_{t_i} - I_{t_{i-1}})(R_{t_i} - R_{t_{i-1}}).$$

Keď označíme $|\Delta_n|$ maximovú normu Δ_n, tak

$$\lim_{|\Delta_n| \to 0} \sum_{i=1}^n (I_{t_i} - I_{t_{i-1}})^2 = \langle I \rangle_t$$

v pravdepodobnosti. Zvyšné dve sumy konvergujú k nule, čo možno ukázať takto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(R_{t_i}-R_{t_{i-1}})^2 &\le \left(\max_{1\le k\le n}|R_{t_i}-R_{t_{i-1}}|\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|R_{t_i}-R_{t_{i-1}}|\right)\\
&= \left(\max_{1\le k\le n}|R_{t_i}-R_{t_{i-1}}|\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} g(s)\,\mathrm{d}s\right|\right)\\
&\le \left(\max_{1\le k\le n}|R_{t_i}-R_{t_{i-1}}|\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} |g(s)|\,\mathrm{d}s\right)\\
&= \left(\max_{1\le k\le n}|R_{t_i}-R_{t_{i-1}}|\right)\left(\int_{0}^{t} |g(s)|\,\mathrm{d}s\right)\to 0
\end{aligned}$$

v pravdepodobnosti pre $|\Delta_n|\to 0$. Podobne pre tretiu sumu

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(I_{t_i}-I_{t_{i-1}})(R_{t_i}-R_{t_{i-1}}) &\le \left(\max_{1\le k\le n}|I_{t_i}-I_{t_{i-1}}|\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|R_{t_i}-R_{t_{i-1}}|\right)\\
&\le \left(\max_{1\le k\le n}|I_{t_i}-I_{t_{i-1}}|\right)\left(\int_{0}^{t} |g(s)|\,\mathrm{d}s\right)\to 0
\end{aligned}$$

v pravdepodobnosti pre $|\Delta_n|\to 0$. Na dokončenie dôkazu je treba ukázať vzťah

$$\langle I\rangle_t = \int_0^t |f(s)|^2\,\mathrm{d}s.$$

Ten vyplýva z tvrdenia 8.6 v knihe Steele (2001), str. 131 a lokalizačného argumentu, Steele (2001), str. 132. □

Definícia 1.44. Nech je $X(t)$ Itôov proces, $f(t), g(t)$ sú ako v definícii 1.42 a $u(t)$ je adaptovaný proces spĺňajúci

$$\int_0^t |u(s)f(s)|^2\,\mathrm{d}s<\infty,\quad \text{skoro isto}\quad \&\qquad \int_0^t |u(s)g(s)|\,\mathrm{d}s<\infty,\quad \text{skoro isto.}$$

Potom definujeme **stochastický integrál** procesu $u(t)$ vzhľadom k $X(t)$ ako

$$\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}X_s = \int_0^t u(s)f(s)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t u(s)g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Poznámka 1.45. Všimnime si, že samotný integrál podľa Itôovho procesu je dobre definovaný Itôov proces.

Kapitola 2

Itôova formula

V reálnej analýze sa pri výpočte Newton-Leibnitzovho integrálu často opierame o základnú vetu kalkulu, ktorá pre funkcie f, g tvrdí

$$f(g(b)) - f(g(a)) = \int_a^b f'(g(s))g'(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.1}$$

Mohli by sme tento vzťah použiť aj pre náhodné procesy?
Uvažujme $f(x) = x^2$, položme $a = 0$, $b = t$, a pod funkciou g si "predstavme" trajektóriu Wienerovho procesu. Z rovnice (2.1) by sme dostali vzťah

$$\int_0^t W_s\,\mathrm{d}W_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_0^2) = \frac{1}{2}W_t^2.$$

Podľa definície stochastického integrálu je

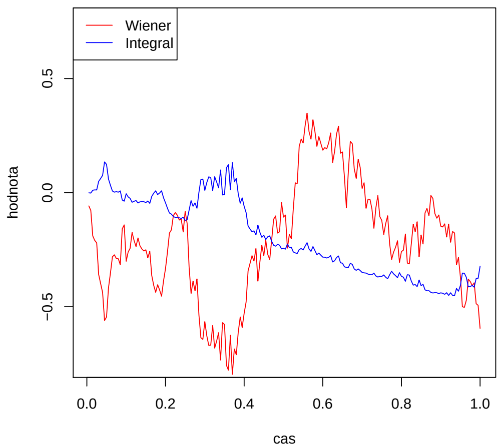
$$\int_0^t W_s\,\mathrm{d}W_s = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})), \qquad \text{v } L^2(\Omega), \tag{2.2}$$

čo je podľa (1.1) rovné

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(W_t^2 - W_0^2 - \sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right), \qquad \text{v } L^2(\Omega).$$

Limita $\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2$ je kvadratická variácia Wienerovho procesu, o ktorej už vieme, že je rovná t. Vidíme teda, že z definície je

$$\int_0^t W_s\,\mathrm{d}W_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t). \tag{2.3}$$



Obr. 2.1: Vľavo realizácia priebehu Wienerovho procesu a pre tento priebeh vypočítaný priebeh procesu $X_t = \int_0^t W_s \, \mathrm{d}W_s$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, pomocou (2.3). Vpravo porovnanie výpočtu priebehu procesu X_t, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, pomocou (2.3) a pomocou jeho Riemannovskej reprezentácie (2.2).

Zistili sme, že v stochastickej analýze je to s retiazkovým pravidlom inak ako v reálnej, dobrá správa však je, že jeho obdoba existuje. V najjednoduchšej podobe vyzerá takto.

Veta 2.1. Nech má funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitú druhú deriváciu. Potom platí

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s) \, \mathrm{d}W_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) \, \mathrm{d}s.$$

Dôkaz: Predpokladajme, že f má kompaktný nosič a položme $t_i = \frac{it}{n}$ pre $0 \leq i \leq n$ prirodzené. Platí

$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_{i=1}^{n} (f(W_{t_i}) - f(W_{t_{i-1}})).$$

Pretože má f spojitú druhú deriváciu, môžme na $f(W_{t_i}) - f(W_{t_{i-1}})$ použiť Taylorovu vetu

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y - x) + \frac{1}{2} f''(x)(y - x)^2 + r(x, y)$$

so zvyškom tvaru

$$r(x,y) = \int_x^y (y-u)(f''(u) - f''(x))\,\mathrm{d}u.$$

Zo spojitosti druhej derivácie f môžme $r(x,y)$ odhadnúť zhora ako

$$|r(x,y)| \le (y-x)^2 h(x,y),$$

kde $h(x,y)$ je rovnomerne spojitá, ohraničená a pre všetky x je $h(x,x) = 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} (f(W_{t_i}) - f(W_{t_{i-1}})) = A_n + B_n + C_n,$$

kde A_n, B_n, C_n označujú

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f'(W_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}),$$

$$B_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(W_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2,$$

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} r(W_{t_{i-1}}, W_{t_i}).$$

Derivácia f' je spojitá, a tak podľa vety o Riemannovej reprezentácii 1.39 platí

$$A_n \to \int_0^t f'(W_s)\,\mathrm{d}W_s,\ n \to \infty, \qquad \text{v pravdepodobnosti.}$$

Sumu B_n možno napísať ako

$$B_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(W_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(W_{t_{i-1}})((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})).$$

Vďaka spojitosti $f''(W_{t_{i-1}})$ konverguje prvá suma pre každé $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f''(W_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) = \int_0^t f''(W_s)\,\mathrm{d}s.$$

Použijeme Markovovu nerovnosť na

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} f''(W_{t_{i-1}})((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})),$$

kde $E(D_n^2)$ odhadneme zhora nasledovne:

$$E(D_n^2) = \sum_{i=1}^{n} E\{f''(W_{t_{i-1}})^2((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}))^2\}$$

$$\leq \sup_{i=1,\dots,n}(f''(W_{t_{i-1}})^2) \sum_{i=1}^{n} E\{((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}))^2\}.$$

Keďže $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ sú normálne rozdelené s nulovou strednou hodnotou a rozptylom $\frac{t}{n}$, tak rozptyl $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2$ je $\frac{2t^2}{n^2}$, a teda

$$\sup_{i=1,\dots,n}\{f''(W_{t_{i-1}})^2\} \sum_{i=1}^{n} E\{((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}))^2\} = \frac{2t^2}{n} \sup_{i=1,\dots,n}\{f''(W_{t_{i-1}})^2\},$$

čím sme dostali, že $E(D_n^2) \leq \frac{2t^2}{n} \sup_{i=1,\dots,n}\{f''(W_{t_{i-1}})^2\}$. Z Markovovej nerovnosti teda $D_n \to 0$ v pravdepodobnosti. Pretože $|r(x,y)| \leq (y-x)^2 h(x,y)$, môžeme C_n zhora odhadnút pomocou

$$|C_n| \leq \sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 h(W_{t_{i-1}}, W_{t_i}).$$

Keď použijeme Cauchyho nerovnosť na pravú stranu, dostaneme

$$E\{|C_n|\} \leq \sum_{i=1}^{n} E\{(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^4\}^{1/2} E(h^2(W_{t_{i-1}}, W_{t_i}))^{1/2}.$$

$E\{(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^4\} = \frac{3t^2}{n^2}$, lebo $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ majú normálne rozdelenie $N(0, \frac{t}{n})$. Ďalej, $h(x,y)$ je rovnomerne spojitá a $h(x,x) = 0$ pre všetky x, takže ku každému $\epsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že $|h(x,y)| \leq \epsilon$ pre vsetky x, y, $|x-y| \leq \delta$. Platí

$$\begin{aligned} E(h^2(W_{t_{i-1}}, W_{t_i})) &\leq \epsilon^2 + \sup(h^2(W_{t_{i-1}}, W_{t_i}))P(|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| \geq \delta) \\ &\leq \epsilon^2 + \sup(h^2(W_{t_{i-1}}, W_{t_i}))\delta^{-2}E\{(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\} \\ &= \epsilon^2 + \sup(h^2(W_{t_{i-1}}, W_{t_i}))\delta^{-2}\frac{t}{n}. \end{aligned}$$

Celkovo máme

$$E\{|C_n|\} \leq n\left(\frac{3t^2}{n^2}\right)^{1/2}\left(\epsilon^2 + \sup(h^2(W_{t_{i-1}}, W_{t_i}))\delta^{-2}\frac{t}{n}\right)^{1/2},$$

a teda $\limsup_{n\to\infty} E\{|C_n|\} \leq 3^{1/2}t\epsilon$. Pretože ϵ môžme voliť ľubovoľné, tak $E\{|C_n|\} \to 0$ pre $n \to \infty$. Z Markovovej nerovnosti máme, že $C_n \to 0$ v pravdepodobnosti.

Zatiaľ sme ukázali, že pre každé $t \geq 0$ konvergujú sumy A_n, B_n, C_n v pravdepodobnosti. Pre pevné t môžme vybrať postupnosť prirodzených čísel $\{a_n\}$ tak, aby sumy A_n, B_n, C_n konvergovali skoro isto. Toto môžme spraviť pre všetky racionálne $t \geq 0$ a pretože obe strany Itôovej formule sú spojité, tak existuje množina Ω_0, $P(\Omega_0) = 1$ taká, že pre každé $\omega \in \Omega_0$ platí Itôova formula pre všetky reálne $t \geq 0$. Týmto sme dokončili dôkaz pre f s kompaktným nosičom.

Nech je $f \in C^2$ obecná. Potom existuje f_M s kompaktným nosičom taká, že $f(x) = f_M(x)$ pre $|x| \leq M$. Pre f_M sme už Itôovu formulu dokázali,

$$f_M(W_t) - f_M(W_0) = \int_0^t f'_M(W_s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_M(W_s)\,\mathrm{d}s.$$

Položme $\tau_M := \min\{t : |W_t| \geq M\}$. Potom pre všetky ω také, že $\{s \leq \tau_M\}$ je $f'(W_s) = f'_M(W_s)$, a teda aj

$$\int_0^t f'(W_s)\,\mathrm{d}W_s = \int_0^t f'_M(W_s)\,\mathrm{d}W_s \text{ pre } \omega \in \{t \leq \tau_M\}.$$

Táto identita nie je samozrejmá, platí však podľa tvrdenia 7.5 v knihe Steele (2001), str. 98. Taktiež je $f(W_s) = f_M(W_s)$ pre $\omega \in \{t \leq \tau_M\}$, a aj

$$\int_0^t f''(W_s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t f''_M(W_s)\,\mathrm{d}s.$$

Keď to zhrnieme, vidíme, že

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\,\mathrm{d}s \text{ pre } \omega \in \{t \leq \tau_M\}.$$

τ_M konverguje k nekonečnu pre $M \to \infty$ skoro isto, preto aj

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\,\mathrm{d}s$$

platí skoro isto. $\square$

Dokázali sme Itôovu formulu pre funkciu jednej premennej. Prirodzeným rozšírením je Itôova formula pre funkcie dvoch premenných: času a Wienerovho procesu.

Veta 2.2. Nech je $f(t,x)$ funkcia, $f(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Potom platí

$$\begin{aligned} f(t,W_t) &= f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,W_s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,W_s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,W_s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Dôkaz: Dôkaz je analogický s dôkazom predchádzajúcej vety. Začneme s funkciami s kompaktným nosičom na $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Rozpíšeme $f(t,W_t) - f(0,0)$ ako

$$f(t,W_t) - f(0,0) = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i, W_{t_i}) - f(t_{i-1}, W_{t_{i-1}}))$$

a na jednotlivé sčítance aplikujeme Taylorovu vetu tvaru

$$f(t,y) = f(s,x) + (t-s)\frac{\partial f}{\partial t}(s,x) + (y-x)\frac{\partial f}{\partial x}(s,x) + \frac{1}{2}(y-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,x) + r(s,t,x,y). \tag{2.4}$$

Pre zvyšok $r(s,t,x,y)$ platí

$$|r(s,t,x,y)| \le (y-x)^2 h(s,t,x,y) + (t-s)g(s,t,x,y), \tag{2.5}$$

funkcie h, g su rovnomerne spojité, ohraničené a

$$h(s,t,x,y) = 0 \qquad \& \qquad g(s,t,x,y) = 0$$

pre $s = t, x = y$. Keď jednotlivé sčítance Taylorovho rozvoja sčítame, dostaneme štyri konečné sumy. Tri z nich konvergujú k integrálom vyskytujúcim sa v Itôovej formuli, štvrtá je sumou zvyškov a konverguje v pravdepodobnosti k nule, čo možno ukázať ako v dôkaze vety 2.1. Sumy konvergujú v pravdepodobnosti. Preto pre pevne t existuje vybraná postupnosť $\{a_n\}$ taká, že sumy budú konvergovať skoro isto. Toto urobíme pre všetky $t \in \mathbb{Q}^+$ a zo spojitosti oboch strán Itôovej formule môžeme usúdiť, že na nejakej množine Ω_0, $P(\Omega_0)$ bude Itôova formula platiť. Lokalizačným argumentom ako v predošlom dôkaze vieme rozšíriť výsledok na všetky $f(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. $\square$

Zaujímavým dôsledkom vety 2.2 je nasledujúca veta. Poskytuje nám šikovný spôsob overovania martingality a tiež metódu, ako nájsť nové martingaly.

Veta 2.3. Nech $f(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ a platí

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \tag{2.6}$$

Potom je $f(t,W_t)$ lokálny martingal. Ak navyše platí aj

$$E\left\{\int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (t,W_t)\,\mathrm{d}t\right\} < \infty \tag{2.7}$$

tak je $f(t,W_t)$ martingal na intervale $\langle 0,T\rangle$.

Dôkaz: Podľa vety 2.2 je

$$f(t,W_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,W_s)\,\mathrm{d}W_s,$$

zvyšné dva integrály sa vzájomne odčítajú. Pretože $f(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, tak $\frac{\partial f}{\partial x}$ je C^1-funkce na $\mathbb{R}$. Potom však $\frac{\partial f}{\partial x} \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2\langle a,b\rangle)$, a teda podľa vety 1.40 je $f(t,W_t)$ lokálny martingal. Ak je okrem toho splnená podmienka

$$E\left\{\int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (t,W_t)\,\mathrm{d}t\right\} < \infty,$$

tak $f(t,W_t) \in L^2_{ad}(\langle a,b\rangle \times \Omega)$. Potom je $f(t,W_t)$ martingal podľa vety 1.29. $\square$

Veta 2.4. Nech je $f(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ a $X(t)$ je Itôov proces na $\langle 0,T\rangle$,

$$X(t) = \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s)\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \le t \le T.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} f(t,X_t) &= f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)a^2(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dôkaz: Dôkaz sleduje rovnakú schému ako dôkaz vety 2.1, preto začneme s dôkazom pre f s kompaktným nosičom. Rozdiel $f(t, X_t) - f(0,0)$ napíšeme ako

$$f(t, X_t) - f(0,0) = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})),$$

na sčítance použijeme Taylorovu vetu tvaru (2.4). Pre zvyšok platí, ako v dôkaze vety 2.2, vzťah (2.5) a tiež to, že funkcie h, g sú rovnomerne spojité, ohraničené a ďalej

$$h(s,t,x,y) = 0 \qquad \& \qquad g(s,t,x,y) = 0$$

pre $s = t, x = y$. Po sčítaní členov Taylorovho rozvoja získame štyri sumy. Prvé tri konvergujú k interálom z (2.8) v pravdepodobnosti, štvrtá suma je sumou zvyškov Taylorovho rozvoja a konverguje v pravdepodobnosti k nule. Ako v dôkaze vety 2.1 môžme pre pevné t vybrať podpostupnosť postupnosti čiastočných súčtov tak, aby konvergovala skoro isto. Pretože to môžme urobiť pre všetky kladné racionálne čísla a obe strany (2.8) sú spojité, tak Itôova formula platí na nejakej Ω_0, $P(\Omega_0) = 1$. Lokalizačným argumentom rozšírime platnosť vety na všetky $f(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Podrobný dôkaz aj s pomocnými tvrdeniami si môžete prečítať v Steele (2001), str. 130-133. $\square$

Poznámka 2.5. Ako vyplýva z dôkazu vety 2.4, môžme (2.8) zapísať ako

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s. \end{aligned}$$

Itôovu formulu z vety 2.4 budeme často písať v diferenciálnom tvare, čiže

$$\mathrm{d}f(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)a^2(s)\mathrm{d}t.$$

Tento zápis slúži len na skrátenie zápisu, sám zmysel nemá, pretože W_t, a potom ani X_t nie je diferencovateľný.

Kapitola 3

Využitie Itôovej formule

3.1 Overenie, že je proces martingal

V predchádzajúcej kapitole sme tvrdili, že sa vetou 2.3 dá pomerne jednoducho overiť martingalita. Teraz si to názorne ukážeme.

Nech je $X_t = W_t^2 - t$. Tento proces môžme zapísať ako $X_t = f(t, W_t)$, kde $f(t,x) = x^2 - t$. Overme podmienku (2.6).

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -1 \qquad \& \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2.$$

Vidíme, že (2.6) platí, takže X_t je lokálny martingal. Podmienka (2.7) pre X_t je taktiež splnená,

$$E\left\{\int_0^T (2W_t)^2 \,\mathrm{d}t\right\} = \int_0^T 4E(W_t^2)\,\mathrm{d}t = 4\int_0^T t\,\mathrm{d}t = 2T^2 < \infty$$

pre $T < \infty$. Proces $X_t = W_t^2 - t$ je martingal.

Nech je $Y_t = \exp\{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$, $\sigma > 0$. Tento proces možno zapísať ako $Y_t = g(t, W_t)$, kde $g(t,x) = \exp\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$. Overenie podmienky (2.6) dáva

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) = -\frac{1}{2}\sigma^2 g(t,x) \qquad \& \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,x) = \sigma^2 g(t,x),$$

(2.6) platí a Y_t je lokálny martingal. Navyše

$$E\left\{\int_0^T (\sigma g(t,W_t))^2 \,\mathrm{d}t\right\} \le E\left\{\sigma^2 \int_0^T \exp\{2\sigma W_t\}\,\mathrm{d}t\right\}.$$

Pretože $\exp\{2\sigma W_t\}$ má logaritmicko-normálne rozdelenie s parametrami $(0, 2\sigma)$, tak $E\exp\{2\sigma W_t\} < \infty$ a potom aj

$$\sigma^2 \int_0^T E(\exp\{2\sigma W_t)\}\, \mathrm{d}t < \infty,$$

čiže $Y_t = \exp\{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$ je martingal.

Uvažujme proces $Z_t = W_t^3 + g(t, W_t)$, $Z_t = h(t, W_t) = f(t, W_t) + g(t, W_t)$. Ako máme zvoliť $g(t, W_t)$, ak chceme, aby bol Z_t martingal? Predpokladajme, že h je dostatočne hladká funkcia a použime vetu 2.3.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, x) = 6x + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x).$$

Skúsme nájsť riešenie také, že $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) = 0$, a teda $g(t, x) = v(t)x$. Potom musí byť

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = -3x = xv'(t) \qquad \Rightarrow \qquad v'(t) = -3$$

Odtiaľ vidíme, že $v(t) = -3xt + c$, c je konštanta. Martingal má nulovú strednú hodnotu. V tomto svetle je

$$E(W_t^3 - 3W_t t + c) = E(W_t^3) - 3tE(W_t) + c = t^{3/2} E\left(\frac{W_t^3}{t^{3/2}}\right) + c = c = 0.$$

Takže $Z_t = W_t^3 - 3tW_t$ je lokálny martingal. Overíme ešte (2.7).

$$E\left(\int_0^T (3W_t^2 - 3t)^2\, \mathrm{d}t\right) = 9E\left(\int_0^T W_t^4 - 2tW_t^2 + t^2\, \mathrm{d}t\right) = 9\int_0^T (2t^2)\, \mathrm{d}t < \infty$$

pre $T < \infty$, teda Z_t je martingal.

3.2 Populačný model

Uvažujme model rastu určitej populácie daný vzťahom

$$\mathrm{d}N_t = N_t \mathrm{d}a_t,$$

N_t značí veľkosť populácie v čase t, a_t určuje relatívnu rýchlosť rastu populácie v čase t. Predpokladáme, že deterministický vývoj populácie je lineárny. Rast populácie však podlieha náhodným vplyvom, my ich budeme charakterizovať Wienerovým procesom. V našom prípade položíme $a_t = rt + \alpha W_t$, kde r, α sú reálne konštanty. Rovnicu

$$\mathrm{d}N_t = rN_t\mathrm{d}t + \alpha N_t\mathrm{d}W_t$$

chápeme v zmysle poznámky 2.5 ako

$$N_t = N_0 + r\int_0^t N_s\,\mathrm{d}s + \alpha\int_0^t N_s\,\mathrm{d}W_s.$$

Zatiaľ nevieme, či je N_t dobre definovaný, predpokladajme, že je a v nasledujúcom sa pokúsime tento predpoklad overiť. Riešenie pre N_t skúsime nájsť použitím Itôovej formule pre funkciu $\ln x$, $x > 0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\ln N_t) &= \frac{1}{N_t}\mathrm{d}N_t + \frac{1}{2}(-N_t^{-2})\mathrm{d}\langle N\rangle_t \\ &= \frac{\mathrm{d}N_t}{N_t} - \frac{1}{2}(-N_t^{-2})\alpha^2 N_t^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{d}N_t}{N_t} - \frac{1}{2}\alpha^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Čiže

$$\ln\frac{N_t}{N_0} = rt - \frac{1}{2}\alpha^2 t + \alpha W_t,$$

ekvivalentne

$$N_t = N_0\exp\{rt - \frac{1}{2}\alpha^2 t + \alpha W_t\}.$$

Existencia a jednoznačnosť je zaručená vetou 1.1 a jej dôkazom v knihe Friedman (2006), str. 98 - 102. Z tohto tvaru vidíme, že je N_t dobre definovaný a pre $N_0 > 0$ je nezáporný. Jedná sa o takzvaný geometrický Brownov pohyb s driftom r a volatilitou α.

Pozrime sa ešte trochu bližšie na naše riešenie. Intuícia napovedá, že pre N_0 a W_t nezávislé je $E\{N_t\} = E\{N_0\}\exp\{rt\}$. Presvedčme sa o tom. Nech je

$$Y_t = \exp\{\alpha W_t\}.$$

Itôova formula hovorí, že

$$Y_t = Y_0 + \alpha\int_0^t \exp\{\alpha W_s\}\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\alpha^2\int_0^t \exp\{\alpha W_s\}\,\mathrm{d}s.$$

Prvý integrál je martingal, to vieme z prvej sekcie tejto kapitoly. Teda

$$E\left\{\int_0^t \exp\{\alpha W_s\}\,\mathrm{d}W_s\right\} = 0$$

podľa vety 1.28. Potom je

$$E\{Y_t\} = E\{Y_0\} + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t E\{Y_s\}\,\mathrm{d}s,$$

čo je obyčajná diferenciálna rovnica s počiatočnou podmienkou

$$E\{Y_0\} = \exp\{\alpha W_0\} = 1, \quad \text{skoro isto.}$$

Jej riešením dostávame

$$E\{Y_t\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\alpha^2 t\right\}.$$

Teda $E\{N_t\} = E\{N_0\}\exp\{rt\}$ skotočne platí, čím sme potvrdili naše tušenie.

Ďalšou vlastnosťou, ktorú môžeme skúmať, je limitné správanie sa N_t. Označme $K = r - \frac{1}{2}\alpha^2$, potom

$$N_t = N_0 \exp\{Kt + \alpha W_t\}.$$

Zákon iterovaného logaritmu nám hovorí, že pre Wienerov proces W_t platí

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1, \quad \text{skoro isto,}$$

záujemci môžu nájsť dôkaz v Friedman (2006), str. 40 - 43. Podobne platí

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1, \quad \text{skoro isto.}$$

Potom je

$$\limsup_{t\to\infty} N_t = \limsup_{t\to\infty} N_0\exp\{Kt + \alpha W_t\} = \limsup_{t\to\infty} N_0 \exp\{Kt + \alpha\sqrt{2t\ln\ln t}\}.$$

Z tohto tvaru vidno, že

$$\limsup_{t\to\infty} N_t = \begin{cases} +\infty & \text{pre } K \geq 0 \\ 0 & \text{pre } K < 0. \end{cases}$$

Podobne je

$$\liminf_{t\to\infty} N_t = \liminf_{t\to\infty} N_0 \exp\{Kt - \alpha\sqrt{2t\ln\ln t}\},$$

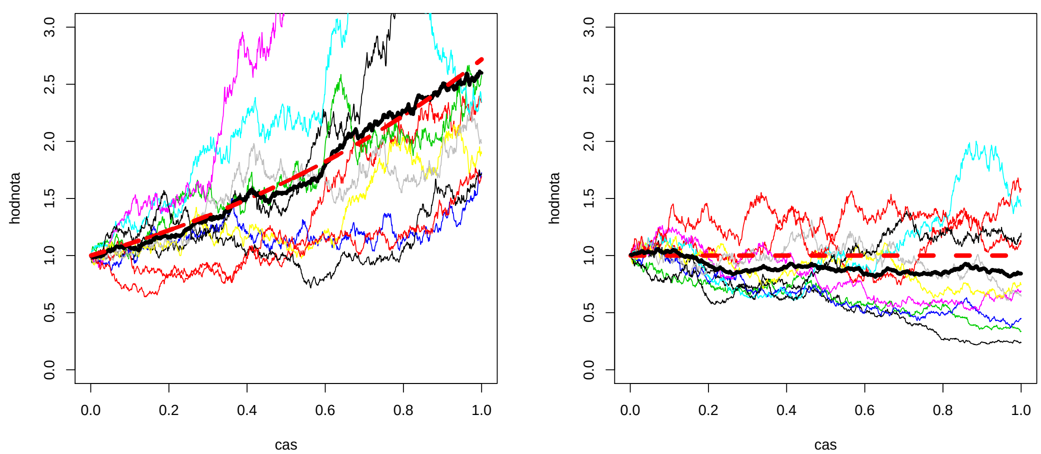
odkiaľ dostávame

$$\liminf_{t\to\infty} N_t = \begin{cases} +\infty & \text{pre } K > 0 \\ 0 & \text{pre } K \leq 0. \end{cases}$$

Keď to zhrnieme, tak

$$\lim_{t\to\infty} N_t = \begin{cases} +\infty & \text{pre } r > \frac{1}{2}\alpha^2 \\ 0 & \text{pre } r < \frac{1}{2}\alpha^2. \end{cases}$$

Pre $r = \frac{1}{2}\alpha^2$ je $N_t = N_0 \exp\{\alpha W_t\}$, čiže N_t osciluje medzi nulou a nekonečnom a nemá jednoznačnú limitu.



Obr. 3.1: Na oboch obrázkoch vidíme po 10 rôznych realizácií procesu N_t porovnanú s ich empirickou strednou hodnotou (tučne čierne) a teoretickou strednou hodnotou (tučne červene prerušovane). Priebehy vľavo sme získali voľbou $r = 1$, $\alpha = 0.5$, vpravo voľbou $r = 0$, $\alpha = 0.5$. Obrázok vpravo zodpovedá exponenciálnemu martingalu zo sekcie 1 kapitoly 3.

3.3 Maximalizácia logaritmického úžitku

Tento problém je modifikácia problému v Dostál (2004), str. 67 - 68. Majme investora, ktorý investuje do jednej akcie a zvyšok svojho kapitálu investuje na peňažnom trhu, ktorý má nulové zúročenie. To zodpovedá investovaniu na krátkom časovom intervale $\langle 0, T\rangle$, $T > 0$. Označme S_t trhovú cenu akcie v čase t. Predpokladáme, že S_t sa riadi geometrickým Brownovým pohybom, čiže

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t), \tag{3.1}$$

Konštanta $\mu > 0$ vo výraze (3.1) reprezentuje očakávaný výnos. Podobne $\sigma > 0$ zodpovedá volatilite akcie. Tie sa za krátky čas nezmenia. Položme $S_0 = 1$. Ďalej označme N_t počet podielov akcie vo vlastníctve investora v čase t, Y_t bude značiť hodnotu portfólia v t a R_t pozíciu investora, čo je proporcia kapitálu investovaného v akcii. Predpokladáme, že $R_t \in (0, 1)$, čo znamená, že investor si nemôže požičať kapitál ani zaujať krátku pozíciu voči akcii. Taktiež predpokladáme nulové transakčné náklady pri predaji a nákupe. Potom platí

$$R_t Y_t = N_t S_t.$$

Cieľom investora je maximalizovať očakávaný úžitok z kapitálu za krátky časový okamžik, takže úroková miera sa nestihne prejaviť. Ten budeme merať úžitkovou funkciou. Tá je striktne konkávna a rastúca, Øksendal (2003), str. 237. My použijeme funkciu $U(x) = \ln x$. Našou úlohou je zistiť, akú stratégiu investovania má investor zvoliť pre čo najväčší úžitok z $E \ln Y_T$. Závislosť zmeny hodnoty portfólia na zmene trhovej ceny akcie možno vyjadriť ako

$$\mathrm{d}Y_t = N_t \, \mathrm{d}S_t,$$

proces N_t je adaptovaný voči filtrácii generovanej Wienerovým procesom. Dosadíme (3.1) a dostaneme

$$\mathrm{d}Y_t = N_t \, \mathrm{d}S_t = N_t S_t(\mu \, \mathrm{d}t + \sigma \, \mathrm{d}W_t).$$

Teraz využijeme, že $R_t Y_t = N_t S_t$ a získame vyjadrenie

$$\mathrm{d}Y_t = Y_t(R_t \mu \, \mathrm{d}t + R_t \sigma \, \mathrm{d}W_t).$$

Riešenie dostaneme použitím Itôovej formule na funkciu $f(x) = \ln x$,

$$Y_t = Y_0 \exp\left\{ \int_0^t \mu R_s \, \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma R_s \, \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 R_s^2 \, \mathrm{d}s \right\},$$

ekvivalntne

$$\ln Y_t = \ln Y_0 + \int_0^t \mu R_s \,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma R_s \,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 R_s^2 \,\mathrm{d}s.$$

My chceme maximalizovať

$$\begin{aligned} E \ln Y_T &= \\ &= E\left\{\ln Y_0 + \int_0^T \mu R_s \,\mathrm{d}s + \int_0^T \sigma R_s \,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2 R_s^2 \,\mathrm{d}s\right\} \\ &= E\left\{\ln Y_0 + \int_0^T \mu R_s \,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2 R_s^2 \,\mathrm{d}s\right\} \\ &= E\left\{\ln Y_0 + \int_0^T \left(\mu R_s - \frac{1}{2}\sigma^2 R_s^2\right) \mathrm{d}s\right\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Druhá rovnosť platí, pretože $\int_0^t \sigma R_s \mathrm{d}W_s$ má podľa vety 1.28 normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou. Z (3.2) vidíme, že potrebujeme maximalizovať argument integrálu, teda $\mu R_s - \frac{1}{2}\sigma^2 R_s^2$. Funkcia

$$f(x) = \mu x - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2$$

nadobúda maximum pre $x = \frac{\mu}{\sigma^2}$. Zistili sme, že optimálna pozícia je $R_t = \frac{\mu}{\sigma^2}$ pre všetky t, pre $\mu \in \langle 0, \sigma^2 \rangle$. Ak je $\frac{\mu}{\sigma^2} > 1$, tak by investor chcel zaujať pozíciu $\frac{\mu}{\sigma^2}$, ale nemá na to dostatok kapitálu.

Literatúra

Lachout, P.: *Teorie pravděpodobnosti*, Karolinum, Praha 2004.

Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

Kuo, H.-H.: *Introduction to Stochastic Integration*, Springer, New York 2006.

Steele, J. M.: *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer, New York 2001.

Øksendal, B. K.: *Stochastic differential equations: an introduction with applications*, Springer, Berlin 2003.

Itô, K.: *On Stochastic Differential Equations*, American Mathematical Society, 1951.

Dostál, P.: *Asymptotická analýza strategií obchodování s akcií při existenci transakčních nákladů*, Sborník prací 13. letní školy JČMF ROBUST 2004, str. 67 - 74.

Friedman, A.: *Stochastic Differential Equations and Applications*, Dover Publications, Inc., Mineola 2006.